

Prodotto vettoriale

Si considerino due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ complanari applicati nel punto O. Si definisce prodotto vettoriale tra due i vettori $\vec{u}, \vec{v}$ nell'ordine indicato, il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ che ha le seguenti proprietà:

- è perpendicolare al piano individuato dai primi due;
- ha modulo uguale al prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo convesso da questi formato;
- ha verso quello secondo il quale si deve disporre un osservatore con i piedi nel punto O d'applicazione dei due vettori affinché possa veder ruotare il vettore $\vec{u}$ in senso antiorario dell'angolo θ perché si sovrapponga al vettore $\vec{v}$.

In figura il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è rappresentato dal vettore $\vec{w}$. Dunque:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \quad (1)$$

e

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta \quad (2)$$

Dobbiamo far notare che per il prodotto vettoriale non vale la proprietà commutativa. Scambiando l'ordine si ottiene un vettore opposto:

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v} \quad (3)$$

Regola pratica (di aiuto) e significato geometrico

Possiamo associare il modulo del prodotto vettoriale di due vettori ad una grandezza geometrica che si ricorda facilmente. Precisamente, si può considerare il parallelogramma avente per lati i due vettori in esame. Indicando θ l'angolo convesso formato dai due vettori $\vec{u}, \vec{v}$ si riconosce che l'altezza del parallelogramma relativa al lato determinato dal vettore $\vec{u}$ è data dal prodotto $v \cdot \sin \theta$ (confrontare la figura) per cui l'area del parallelogramma è

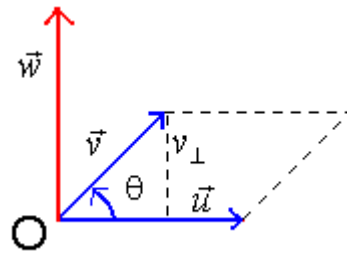
$$Area(\vec{u}, \vec{v}) = u \cdot v \cdot \sin \theta,$$

coincide pertanto con il modulo del prodotto vettoriale dei vettori $\vec{u}, \vec{v}$. Per ricordare più facilmente il concetto di prodotto vettoriale di due vettori si potrà allora ricordare che il suo modulo coincide con l'area del parallelogramma individuato dai due vettori.

Prodotto vettoriale

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

$$w = u \cdot v \cdot \sin \theta = u \cdot v_{\perp}$$



Il prodotto vettoriale ha per modulo il valore dell'area del parallelogramma determinato dai due vettori.

Il prodotto vettoriale con le componenti cartesiane dei vettori.

Quando dei due vettori in esame si conoscono le componenti cartesiane in un riferimento nello spazio Oxyz si può determinare l'espressione cartesiana del prodotto vettoriale velocemente sviluppando un determinante del terzo ordine.

Con i vettori $\vec{u}, \vec{v}$ espressi nella forma cartesiana

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}, \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

il vettore prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è dato dal valore del determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

e quindi, ricordando la regola per lo sviluppo di quest'ultimo,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} - (u_x v_z - u_z v_x) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}$$

Ricordiamo infine che il prodotto vettoriale di due vettori è nullo nei seguenti casi:

- Se i due vettori sono paralleli (concordi o discordi). In questo caso l'angolo θ formato ha ampiezza nulla oppure è π radianti e quindi risulta $\sin \theta = 0$.

Almeno uno dei due vettori è il vettore nullo.